Topologie et Calcul Différentiel

# Exercices complémentaires – Feuille 2

## 1 Topologie des espaces vectoriels normés

**Exercice 1.** Soit $(E, \| \ \|_E)$ un espace vectoriel normé et $A, B \subseteq E$.

i) Montrer que
   (a) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   (c) $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

   et donner un exemple où la première inclusion soit stricte.

ii) Que peut-on dire à propos de $(A \overset{\circ}{\cup} B)$ et $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ ?

iii) Soit $(F, \| \ \|_F)$ un espace vectoriel normé et $C \subseteq F$. On munit $E \times F$ de la norme $\| \ \|$ définie par $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$ où $(x, y) \in E \times F$.
   Montrer que $\overline{A \times C} = \overline{A} \times \overline{C}$ et $(A \overset{\circ}{\times} C) = \mathring{A} \times \mathring{C}$.

**Exercice 2.** Soit $(E, \| \ \|_E)$ un espace vectoriel normé. Pour $A \subseteq E$, on note $u(A) = \mathring{\overline{A}}$ et $v(A) = \overline{\mathring{A}}$.

i) Supposons $E = \mathbb{R}$ avec la norme usuelle. Calculer $u(A)$ et $v(A)$ pour $A = ]0, 2]$ et $A = \mathbb{Q}$.

ii) Comparer $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $u(A)$ et $v(A)$.

iii) Montrer que $u(u(A)) = u(A)$ et $v(v(A)) = v(A)$.

**Exercice 3.** Soit $E$ un espace vectoriel normé et $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $A = \{x \in E \mid 1 < f(x) < 2\}$ est ouvert et que $B = \{x \in E \mid f(x) \leq g(x)\}$ est fermé.

**Exercice 4.** Soit $\mathbb{R}$ muni de la norme usuelle. Calculer l'intérieur, l'adhérence de $A$ où :

i) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

ii) $A = \mathbb{Q}$.

iii) $A = \{-2\} \cup ]0, 1]$.

**Exercice 5.** Si $A$ est une partie d'un espace vectoriel normé $E$, la *frontière* de $A$, notée $\partial A$, est l'ensemble définie par $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

i) Montrer que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$ et que $\partial A$ est fermé.

ii) Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles suivantes de $\mathbb{R}^2$ muni d'une norme usuelle :

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 2\}$.
   (b) $B = \mathbb{Q}^2$.
   (c) $C = ]-2, 1[ \times [0, 1]$.
   (d) $D = \{(x, x^2) \subseteq \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
   (e) $E = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.
   (f) $F = [0, 1] \times ]0, 1[$.

**Exercice 6.** Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Calculer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de $F$ où :

i) $F = \{f \in E \mid f \geq 0\}$.

ii) $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1)\}$.

iii) Mêmes questions avec la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

## 2 Limites

**Exercice 7.** On munit le plan complexe $\mathbb{C}$ avec une norme usuelle. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{C}$.

i) Supposons que $z_n \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{Z}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire.

ii) Supposons que $z_n$ non nul, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $\frac{z_{n+1}}{z_n} \to 0$. Est-elle convergente ? Si oui, qu'elle est la limite ?

(b) La même question si la suite vérifie $\frac{z_n}{z_{n+1}} \to 0$.

**Exercice 8.** Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ espace vectoriel normé.

i) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions dans $E$ convergeant uniformément vers une fonction $f$ et $g$ une fonction uniformément continue. Montrer que $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément.

ii) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites de fonctions dans $E$ convergeant uniformément vers des fonctions $f$ et $g$ supposées bornées. Montrer $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $fg$.

iii) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions dans $E$ convergeant uniformément sur $[0,1[$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

iv) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions décroissantes dans $E$ convergeant simplement vers la fonction nulle dans $E$, $0_E$. Montrer que cette convergence est uniforme.

**Exercice 9.** Soient $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les fonctions définies par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que chaque $f_n$ est $\mathcal{C}^1$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$ qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 10.** Soient $u_n \in \mathcal{C}(]0,1], \mathbb{R})$ les fonctions définies par

$$u_n(x) = x^n \ln x, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et on pose $u_n(0) = 0$. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$.

**Exercice 11.** Soient $u_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ les fonctions définies par

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx), \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Étudier :

i) La convergence simple de la suite des fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0, +\infty[$.

ii) La convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

iii) La convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

**Exercice 12.** Soient $f_n \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ les fonctions définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

i) Étudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ii) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t)dt$$

Y a-t-il une convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ?

iii) Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.