Arithmétique

Exercices complémentaires – Feuille 2

1 Applications et fonctions

Exercice 1. On considère la table suivante de fonctions “pas très compliquées” :

$f_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3+1$	$f_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x^4+2x^2}{x}$	$f_3: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$	$f_4: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longmapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{\lfloor x \rfloor+1}$
$f_5: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln(x^2+1)$	$f_6: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \longmapsto \frac{n^2-3n+2}{n-2}$	$f_7: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{-\frac{2x^2-6x-8}{x-3}}$	$f_8: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{z}{z^2+4}$

Vérifier qu'elles sont bien définies, calculer le domaine de chaque fonction et déterminer si sont des applications.

Exercice 2. Soient les fonctions

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |x|+|y| \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2, x-y) \end{array}$$

Étudier le domaine et l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g. Peut-on définir $f \circ g$? et $g \circ f$? Pourquoi ?

Exercice 3. On considère les applications suivantes

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\ln(x+1)} \end{array}$$

a) Étudier le domaine et l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
b) Calculer $g \circ f$ et étudier le domaine, l'injectivité, surjectivité et bijectivité.
c) Peut-on définir $f \circ g$? Pourquoi ?

Exercice 4. Soient les applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

a) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
b) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$n \in \mathbb{N}: \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective. Comparer les résultats avec l'Exercice 4.

Exercice 6 (La paradoxe de l'hôtel de Hilbert). Dans le monde parallèle merveilleux et utopique des mathématiques, il existe un hôtel possédant une infinité de chambres numérotées par tous les nombres entiers (à partir de 0) : c'est **l'hôtel de Hilbert**. Ce jour là, l'hôtel était complet, toutes les chambres étaient occupées. Mais un nouveau client arrive. "Pas de problèmes" lui annonce le gérant de l'hôtel. Grâce au téléphone interne de l'hôtel, il téléphone simultanément à tous les clients de l'hôtel.

a) Qu'est-ce qu'il doit demander aux clients pour redistribuer les chambres et trouver une place aux nouveaux client sans expulser aucun hôte ?

b) Une heure plus tard, un bus de l'entreprise **Cantor Tours** arrive dans le parking de l'hôtel. Le bus est lui aussi infini, avec toutes les places numérotées par les nombres entiers : c'est une infinité de nouveaux clients qui demandent à avoir une place dans l'hôtel. "Ah ! Pas de souci" annonce encore une fois le gérant. Comment peut-il redistribuer les chambres pour trouver une place pour tout le monde ?

c) **(Bille extra)** Le gérant passa l'heure suivante à réfléchir à comment réagir si c'était une infinité de bus infinis qui arrivaient avec chacun une infinité de clients comme avant. Comment pourrait-il faire ?

Exercice 7. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Exercice 8. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
Montrer que f et g sont bijectives.

2 Image directe et réciproque

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer les ensembles suivants : $f(\{-1\}), f(\{0\}), f(\{1\}), f([-3,-1]), f([-2,1]), f([-3,-1] \cup [-2,1])$ et $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. Les comparer.

b) Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(\{-1\}), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(]-\infty,1]), f^{-1}(]1,+\infty[), f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

Exercice 10. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de l'Exercice 2. Déterminer :

a) $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(]-\infty,0]), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(]-1,1])$ et $f^{-1}(]4,+\infty[)$.

b) $g^{-1}(\{(0,0)\}), g^{-1}(\{(1,1)\}), g^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^+)$ et $g^{-1}(\mathbb{R}^+ \times \{0\})$.

c) $f(X_+)$ et $f(C)$ où $X_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, $C = [0,1] \times [-2,3]$.

Exercice 11. Soient $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ les fonctions définies par :

$$(u,v) \in \mathbb{R}^2 : f(u,v) = (u+v, u-v), \quad g(u,v) = (u+v, u^2+v^2), \quad h(u,v) = \left(\frac{v}{u}, uv\right)$$

On considère les sous-ensembles $A = [1,2] \times [3,4]$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x+y \leq 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Dessiner A et B.

b) Déterminer les images réciproques de A et B par f, g, h.

c) Dessiner, si possible, les différentes images réciproques.

Exercice 12 (Bille extra). Soit $k \in \mathbb{R}$. On défini la famille de fonctions

$$f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{-\ln\left(\frac{x^2+y^2-k^2}{1+2k}\right)} \end{array}$$

Étudier f_k en fonction des valeurs de k : domaine, injectivité, surjectivité et bijectivité. Dessiner le domaine de f_k dans chaque cas.