Équations différentielles I

TD1 – Équations différentielles de premier ordre

Exercice 1. Soient les équations différentielles :

$(E_1)\quad x' = x + e^{2t}$	$(E_2)\quad x' = x + t^2$	$(E_3)\quad x' = x + \sin(t)$	$(E_4)\quad x' = 2x + t^2 + 5$
$(E_5)\quad xy' + 4y = x^3 - x$	$(E_6)\quad xy' + 2y = 3$	$(E_7)\quad y' = \left(\frac{-1}{1+x}\right) y + x$	$(E_8)\quad y' + \frac{1}{\tan(x)} y = 2\cos(x)$

Pour chacune des équations différentielles (E_i) précédentes :

a) Donner la solution générale du système homogène associé.

b) Trouver une solution particulière dans l'espace vectoriel de fonctions précisé pour chaque équation.

(E_1) $x_P(t) \in \mathbb{R}\langle e^{2t}\rangle$.
(E_2) $x_P(t) \in \mathbb{R}\langle 1, t, t^2\rangle$.
(E_3) $x_P(t) \in \mathbb{R}\langle \cos(t), \sin(t)\rangle$.
(E_4) $x_P(t) \in \mathbb{R}\langle 1, t, t^2\rangle$.
(E_5) $y_P(x) \in \mathbb{R}\langle 1, x, x^2, x^3\rangle$.
(E_6) $y_P(x) \in \mathbb{R}\langle 1, x\rangle$.
(E_7) $y_P(x) \in \mathbb{R}\left\langle \frac{1}{1+x}, \frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{1+x}, \frac{x^3}{1+x}\right\rangle$.
(E_8) $y_P(x) \in \mathbb{R}\langle 1, \sin(x)\rangle$.

c) Décrire la forme des solutions générales pour chaque équation différentielle.

d) Trouver une solution qui vérifie la condition initiale $x(0) = 1$ pour $(E_1), \dots, (E_4)$, $y(1) = 0$ pour $(E_5), (E_6), (E_7)$, et $y(\pi/2) = 0$ pour (E_8), en explicitant son domaine maximale de définition.

Exercice 2 (Méthode de la variation des constantes). Soit l'équation différentielle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$:

$$x' = p(t)x + q(t) \qquad p, q \in \mathcal{C}(I) \tag{E}$$

Soit $P(t)$ une fonction primitive de $p(t)$. La forme générale des solutions de l'équation homogène associé est

$$x_H(t) = ce^{P(t)}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Supposons qu'il existe une solution particulière de la forme $x_P(t) = c(t) \cdot e^{P(t)}$, où $c(t)$ est une fonction différentiable sur I. Trouver une expression explicite pour $c(t)$.

Exercice 3. Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes par la méthode des coefficients indéterminés et par la méthode de la variation des constantes, si possible. Déterminer les intervalles de définitions maximales des solutions.

a) $tx' = x + t^2$.

b) $x' = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

c) $x' = tx + 1$.

d) $x' = x + e^t$.

e) $x' = x + e^{-t}$.

f) $x' = \frac{2}{t+1}x + (t+1)^2$.

g) $x' = -\cos(t)x + \frac{1}{2}\sin(2t)$.

h) $\sqrt{t}x' = x + 3t - \sqrt{t}$.

Exercice 4. Résoudre les problèmes de valeur initiale suivantes par la méthode des coefficients indéterminés et par la méthode de la variation des constantes. Comparez les résultats.

a) $\begin{cases} x' = 2x + t^2 - t \\ x(0) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2tx' = x \\ x(1) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{4+t^2}x' = tx \\ x(0) = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = \sin(t)\cos(t)x \\ x(\pi/2) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = e^t(x-1) \\ x(0) = e \end{cases}$

f) $\begin{cases} x' = e^t(x-1) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 5. Résoudre les problèmes de valeur initiale suivantes par la méthode des variables séparables en explicitant l'intervalle maximal de définition de la solution :

a) $\begin{cases} x' = -\frac{t}{x} \\ x(1) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \frac{t^2+1}{2-2x} \\ x(-3) = 4 \text{ et } x(-3) = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = \frac{t+tx^2}{4x} \\ x(1) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = \sqrt{\frac{t^2+t^2x^2}{x^2+t^2x^2}} \\ x(1) = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = \frac{-3x}{\tan(t)} \\ x(\pi/2) = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x' = -\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(t)} \\ x(\pi/4) = \pi/4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y' = -\frac{3x+xy^2}{2y+x^2y} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\,\rho}{\mathrm{d}\,\theta} = \frac{\sin\theta+e^{2\rho}\sin\theta}{3e^{\rho}+e^{\rho}\cos\theta} \\ \rho(\pi/2) = 0 \end{cases}$

Exercice 6. Résoudre avec la méthode des séries entières les problèmes de valeurs initiales suivantes :

a) $(1+t)x' - kx = 0$ avec $x(0) = 1$ ($k \in \mathbb{R}$).

b) $x'' + x = 0$ avec :
   i) $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.
   ii) $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

c) $x' = 3t^2x$ avec $x(0) = 2$.

d) $(1+t^2)y'' - 8ty' + 15 = 0$ où $y(0) = 3, y'(0) = 8$.

e) $y'' - ty = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Notation pratique : $n! = n(n-1)(n-2)\ldots,\quad n!! = n(n-2)(n-4)\ldots,\quad n!!! = n(n-3)(n-6)\ldots$

Exercice 7 (Loi de la décroissance radioactive). Pour les substances radioactives, des expériences ont montré que, en l'absence d'apport extérieur, le taux de variation du nombre $Q(t)$ d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction Q est donc solution de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,t} = -\lambda Q$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante propre à la substance radioactive.

a) Résoudre l'équation précédente avec condition initial $Q(0) = Q_0 \in \mathbb{R}_+$.

b) On appelle *temps de demi-vie* pour une substance radioactive le temps $T > 0$ nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent. Trouver une relation reliant T et λ.

c) Pour le carbone–14 (C–14), le temps de demi-vie est de 5700 ans. Que vaut approximativement λ ?

d) L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique faut apparaître que l'arbre ne contient plus que 40% du C–14 qu'il contenait avant l'éruption. De quand date l'éruption si l'analyse a été effectuée en 2006 ? (*Indication : utiliser le temps de demi-vie du C–14*)

Exercice 8 (Modèles de croissance de population). On considère une population formée de $N = N(t)$ individus en évoluant en fonction du temps t, où N est dérivable.

a) **(Malthus, 1798)** On suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus, c-à-d $N' = kN$ avec $k \in \mathbb{R}$ constante (égale à la différence entre la taux de natalité et de mortalité qui sont supposés constants dans ce modèle). Déterminer la solution N si à l'instant $t = 0$ la population est de $N_0 \in \mathbb{R}_+$ individus. Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infinie ?

b) **(Verhulst, 1838)** Ce modèle prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux k n'est plus constat mais proportionnel à la différence entre une population maximale $N_{\max} > 0$ et la population à l'instant t. On a donc, pour un certain $r \in \mathbb{R}$, l'équation du modèle :

$$N'(t) = rN(t)(N_{\max} - N(t)) \qquad \text{(Équation logistique)}$$

   i) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose $y(t) = \frac{1}{N(t)}$. Justifier que y est dérivable puis calculer N' en fonction de y et y'.

   ii) Remplacer N et N' par leurs expressions en fonction de y et y' dans l'équation logistique et vérifier que y est solution de l'équation différentielle

$$y' = r(1 - N_{\max}y)$$

   iii) Résoudre l'équation précédente. En déduire la solution générale pour l'équation logistique.

   iv) Comment évolue cette population lorsque t tends vers l'infinie ?