Équations différentielles I

TD1 Extra – Équations différentielles de premier ordre

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes par la méthode des coefficients indéterminés ou par la méthode de la variation des constantes, si possible.

a) $x' + 2x = 6$
b) $x' = 4x + 16t$
c) $tx' + 3x - 10t^2 = 0$
d) $x' = \frac{tx}{\sqrt{4+t^2}}$
e) $x' + 2x = 20e^{3t}$
f) $x' - 2tx = t$
g) $t^2x' + 2tx = \sin(t)$
h) $tx' = \sqrt{t} + 3x$
i) $x' = \ln(t)x$
j) $tx' + (5t+2)x = \frac{20}{t}$
k) $\cos(t)x' + \sin(t)x = \cos^2(t)$
l) $2\sqrt{t}x' + x = 2te^{-\sqrt{t}}$

Exercice 2. En utilisant séparation de variables, trouver la solution aux problèmes de valeur initiale suivantes, en explicitant l'intervalle maximal de définition de la solution :

a) $\begin{cases} 2xx' = 3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x' = e^{t-x} \\ x(0) = 2 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x' = (t-4)x^3 \\ x(4) = 1 \end{cases}$
d) $\begin{cases} \sin(t)x' = x\cos(t) \\ x(\pi/2) = 1 \end{cases}$
e) $\begin{cases} tx' - kx = 0 \\ x(-1) = 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$
f) $\begin{cases} t^2x' + x = 3 \\ x(1) = 3 \end{cases}$
g) $\begin{cases} x' - te^{-x} = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$
h) $\begin{cases} x' = \frac{4\sqrt{x}\ln t}{t} \\ x(e) = 1 \end{cases}$
i) $\begin{cases} x^2 + (t+1)x' = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$
j) $\begin{cases} x' = 2t\sqrt{1-x} \\ x(0) = 1 \end{cases}$
k) $\begin{cases} xx' = t \\ x(1) = 2 \end{cases}$
l) $\begin{cases} x = \ln(x') \\ x(0) = \ln 2 \end{cases}$
m) $\begin{cases} x' = \cos(t)e^{x+\sin(t)} \\ x(\pi/2) = 0 \end{cases}$
n) $\begin{cases} tx' - x = x^3 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 3. Trouver les séries entières qui vérifient les problèmes de valeurs initiales suivantes, en donnant son rayon de convergence :

a) $2t(t-1)x' + (2t-1)x' + 1 = 0$ avec $x(0) = 1$.
b) $x'' - 2tx' - 2x = 0$ avec :
   i) $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.
   ii) $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.
c) $(t^2+1)x'' + 3tx' + x = 0$ avec :
   i) $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.
   ii) $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.

Notation pratique : $n! = n(n-1)(n-2)\dots,\quad n!! = n(n-2)(n-4)\dots,\quad n!!! = n(n-3)(n-6)\dots$

Équations différentielles I
Solutions

Solution 1. Pour $C \in \mathbb{R}$:

a) $x(t) = Ce^{-2t} + 3$
b) $x(t) = Ce^{4t} - 4t - 1$
c) $x(t) = \frac{C}{t^3} + 2t^2$
d) $x(t) = Ce^{\sqrt{4+t^2}}$
e) $x(t) = Ce^{-2t} + 4e^{3t}$
f) $x(t) = Ce^{t^2} - \frac{1}{2}$
g) $x(t) = \frac{C-\cos(t)}{t^2}$
h) $x(t) = Ct^3 - \frac{2\sqrt{t}}{5}$
i) $x(t) = Ce^{-t+t\ln(t)}$
j) $x(t) = \frac{Ce^{-5t}+4}{t^2}$
k) $x(t) = (C+t)\cos(t)$
l) $x(t) = \left(C + \frac{2}{3}t\sqrt{t}\right)e^{-\sqrt{t}}$

Solution 2. On trouve l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ maximal de définition de la solution :
(1) En regardant où est que l'équation différentielle est définie.
(2) En déterminant le domaine de définition de la solution du problème de valeurs initiales.
(3) En oubliant les points frontière de l'intervalle obtenu de l'intersection de (1) et (2).

a) $\begin{cases} x(t) = \sqrt{1+3t} \\ I =]-1/2, +\infty[\end{cases}$
b) $\begin{cases} x(t) = \ln\left(-1+e^2+e^t\right) \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$
c) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sqrt{-15+8t-t^2}} \\ I =]3, 5[\end{cases}$
d) $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$
e) $\begin{cases} x(t) = (-1)^{-k}t^k \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$
f) $\begin{cases} x(t) = 3 \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$
g) $\begin{cases} x(t) = \ln(1+\frac{t^2}{2}) \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$
h) $\begin{cases} x(t) = \ln^4(t) \\ I =]1, +\infty[\end{cases}$
i) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{1+\ln(1+t)} \\ I =]-1+e^{-1}, +\infty[\end{cases}$
j) $\begin{cases} x(t) = 1 - \frac{t^4}{4} \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$
k) $\begin{cases} x(t) = \sqrt{3+t^2} \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$
l) $\begin{cases} x(t) = -\ln(1/2 - t) \\ I =]-\infty, 1/2[\end{cases}$
m) $\begin{cases} x(t) = -\ln\left(1+e-e^{\sin(t)}\right) \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$
n) $\begin{cases} x(t) = 0 \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$

Solution 3.

a) $x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n!)}{(2n+1)!!}t^n$ dans $]-1, 1[$.

b) i) $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} = e^{t^2}$ dans $\mathbb{R}$.
ii) $x(t) = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!!}t^{2n+1}$ dans $\mathbb{R}$.

c) i) $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n(n!)}t^{2n}$ dans $]-1, 1[$.
ii) $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n(n!)}{(2n+1)!!}t^{2n}$ dans $]-1, 1[$.