Équations différentielles I

TD3 – Systèmes différentiels linéaires à coeff. constants

Exercice 1 (Exponentielle d'une matrice).

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer e^A.

b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Démontrer les propriétés suivantes :

i) $e^{O_n} = I_n$, où $O_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ est la matrice nulle.

ii) $e^{\lambda I_n} = e^{\lambda} I_n$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

iii) Si $AB = BA$ alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

iv) La matrice e^A est toujours inversible, dont l'inverse est e^{-A}.

v) Si $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ est inversible, alors $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$.

c) Calculer les exponentielles des matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

d) **(Bilan extra)** Prouver que $e^{{}^tA} = {}^t\left(e^A\right)$ et $\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}$.

Exercice 2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer e^A, e^B.

b) Montrer que

$$(A+B)^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k t^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k t^{2k} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A+B)^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} t^{2k+1} \\ (-1)^k t^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire la forme de e^{A+B}.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes différentiels linéaires suivantes :

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 5\cos(t) \end{pmatrix}$

Exercice 4. Soit $X(t) = {}^t(x(t), y(t), z(t))$. Donner la solution des systèmes linéaires suivantes qui vérifie $X(0) = {}^t(0, 0, 1)$.

a) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X$

b) $X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} X$

c) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} X$

d) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -5 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} X$

e) $X' = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 4 \\ -17 & 9 & 7 \\ -11 & 5 & 5 \end{pmatrix} X$

f) $X' = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 18 & -5 & 0 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $X' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -8e^t \\ -33e^t \\ -8e^t \end{pmatrix}$

h) $X' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} X + (1+t^2)e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

i) $X' = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 13 \\ 16 \\ 32 \end{pmatrix} e^t$

j) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Résoudre les systèmes différentiels à valeurs initiales suivantes :

a) $\begin{cases} x' = x + y + z + t + 1, & x(0) = 0 \\ y' = x - y + u + t - 1, & y(0) = 0 \\ z' = z - u + 2, & z(0) = 0 \\ u' = -z + u + 1, & u(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = -x - 2y - z + e^t + \cos(t), & x(0) = 1 \\ y' = z, & y(0) = 0 \\ z' = -y - 2z + e^t + \cos(t), & z(0) = 4 \\ u' = y + z - u + e^t + \cos(t), & u(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 6 (Modèle de combat : Lois de Lanchester). Les équations de Lanchester sont des EDOs décrivant la dépendance temporelle des forces de deux armées A et B en combat. Soient $x(t)$ et $y(t)$ le nombre des soldats en combat de l'armée A et B à l'instant t, respectivement.

a) **(Modèle simple)** L'armée A envoie un flux continu de balles sur l'armée B, et inversement. Chaque soldat de A possède une puissance de tir $\alpha > 0$, qui représente le nombre d'unités adverses que le soldat peut neutraliser (tuer ou blesser) par unité de temps. De la même manière, les de B possèdent chacun une puissance de tir $\beta > 0$. On obtiens le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -\beta y, & x(0) = x_0 \\ y' = -\alpha x, & y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons une bataille où $\alpha = 1/9$ et $\beta = 4$ (les soldats de B sont en avantage), le nombre d'effectifs de A au début du combat est de 150 unités, et de 90 pour B. Qui gagne la bataille ? Combien dure-t-elle ? Quel est le nombre total de pertes ? (Le temps t est mesuré en jours)

b) **(Billan extra : la bataille d'Iwo Jima)** On peut considérer aussi les renforcements des deux armées pendant la bataille : soient $f(t)$ et $g(t)$ les soldats envoyés dans la bataille à l'instant t par A et B, respectivement. Le modèle incorpore, donc, une partie non-homogène :

$$\begin{cases} x' = -\beta y + f(t), & x(0) = x_0 \\ y' = -\alpha x + g(t), & y(0) = y_0 \end{cases}$$

Pendant la Seconde Guerre Mondiale, les États-Unis (A) se lancent à l'assaut de l'île d'Iwo Jima, solidement défendue par 21500 soldats de l'armée impériale japonaise (B). L'île était fortifiée par un réseau de protections souterraines, dont le but était d'infliger des pertes sévères aux Alliés et de les décourager d'envahir l'archipel du Japon. On suppose que $\alpha = \frac{1}{100}$ et $\beta = \frac{4}{100}$, $x(0) = 0$ et $y(0) = 21500$. Les japonais étaient isolés ($g(t) = 0$), et la politique des renforcements de nouveaux soldats des États-Unis pendant la bataille peut s'exprimer en utilisant la fonction par morceaux :

$$f(t) = 54000 \cdot \mathbb{1}_{[0,1[}(t) + 6000 \cdot \mathbb{1}_{[2,3[}(t) + 13000 \cdot \mathbb{1}_{[5,6[}(t)$$

Combien des soldats avaient les États-Unis et le Japon pendant les premiers six jours ? Combien des jours dura la bataille ? Quel fut le nombre total de pertes ? Combien d'américains survécurent ? (Le temps t est mesuré en jours).

(*Utiliser une calculatrice ou un logiciel de calcul pour approcher les résultats et comparer avec la réalité historique de cette sanglante bataille).*